## QR-felbontás

Tétel: ! $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemsing. $\Rightarrow \exists Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális és $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemsing. felső $\Delta$ m., h. $A = Q \cdot R$.

## QR-felbontás algoritmusa

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemsing. (szimm. m. mindig pox. def.)

1. $A^T A \xrightarrow{\text{G.elim.}} U \to \tilde{U} \to \tilde{U}^{-1}$
2. $Q = A \cdot \tilde{U}^{-1}$
3. $R = \tilde{U}$

## QR-módszer

Adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemsing. esetén a QR-módszerrel állíthatjuk elő az A m. valamennyi sajátértékének és hozzá tart. sajátvektorának közelítését.

## QR-módszer alg.-a

$i = 1, 2, \dots$ Kiszámítjuk $A_i = Q_i \cdot R_i$

$A_{i+1} = R_i \cdot Q_i$

Def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spektrálnormáján a $\sqrt{\sigma_1}$ számot értjük, ahol $\sigma_1$ az $A^T A$ domináns sajátértéke. ($\sigma_1 \geq 0$, mert $A^T A$ és $AA^T$ sé.-i valósak és nemneg.)

Tétel: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén az $A^T A$ és $AA^T$ sajátértékei nemnegatívak.

Biz.: a) ! $\lambda \in \mathbb{R}$ sé.-e $A^T A$ ~~$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$~~-nak és $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\lambda$-hoz tart. s.v.

$$(A^T A)x = \lambda x \to (x^T A^T)(Ax) = x^T \lambda x \to (Ax)^T (Ax) = \lambda \cdot x^T \cdot x$$

$$\underbrace{\|Ax\|_2^2}_{\geq 0} = \lambda \cdot \underbrace{\|x\|_2^2}_{> 0} \Rightarrow \lambda = \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq 0.$$

b) ! $\sigma \in \mathbb{R}$ sé.-e $A \cdot A^T$-nak és a $\sigma$-hoz tart. s.v. ! $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$(AA^T)y = \sigma y \to (y^T A)(A^T y) = y^T \sigma y \to (A^T y)^T (A^T y) = \sigma \cdot y^T y$$

$$\underbrace{\|A^T y\|_2^2}_{\geq 0} = \sigma \cdot \underbrace{\|y\|_2^2}_{> 0} \Rightarrow \sigma = \frac{\|A^T y\|_2^2}{\|y\|_2^2} \geq 0$$

# Nemlineáris egyenletek

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (minimum folyt, hogy eljárást alkalmazhassunk rajta) tetsz. fv.

$f(x)=0$

$f(x)=x^2+2x+1 \quad f:[-2,0]\to\mathbb{R} \quad x^*$

## 1. Intervallumfelező eljárás

és $f(a)\cdot f(b) \not> 0$

! $f(x)=0$ nemlin. egy., $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ahol $f$ folyt. ($f\in C[a,b]$)

$\Rightarrow$ Bolzano-tétel miatt $\exists x^*\in(a,b)$, hogy $f(x^*)=0$.

Mivel $\frac{a+b}{2}\in(a,b)$, ezért $x^*\approx\frac{a+b}{2}$. Ha $f(a)\cdot f(x^*)<0$, akkor $[a,x^*]$-ban van a gyök, egyébként $[x^*,b]$-ben. Akkor az új intervallumot megfelezzük és így tovább. A kapott int.-ok egymásba skatulyázottak, ezért a közös részük (metszetük) nemüres és tart.-a az $f(x)=0$ egyik gyökét.

### Int.felező eljárás algoritmusa

$\boxed{k=1}$ $\quad [a_1,b_1]=[a,b] \quad x^{(1)}=\frac{a_1+b_1}{2}$

Tfh. az $x^{(k)}$ k-adik közelítést már kiszámítottuk.

$\boxed{k=k+1}$

$$[a_{k+1},b_{k+1}]=\begin{cases}[a_k,x^{(k)}], & \text{ha } f(a)\cdot f(x^{(k)})<0\\ [x^{(k)},b_k], & \text{ha } f(x^{(k)})f(b_k)<0\end{cases} \qquad x^{(k+1)}=\frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$$

$k=1,2,3,\dots$

Az $x^*$ gyököt $[a_k,b_k]$ tetsz. $y$ pontjával közelíthetjük.

A hiba:

$$|x^*-y|\le\max\{y-a_k,\, b_k-y\}\to\min:\ y=\frac{a_k+b_k}{2}$$

Ezért $x^*\approx\frac{a_k+b_k}{2}=x^{(k)}$

$$|x^*-x^{(k)}|\le\frac{b_k-a_k}{2}\le\frac{b-a}{2^k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

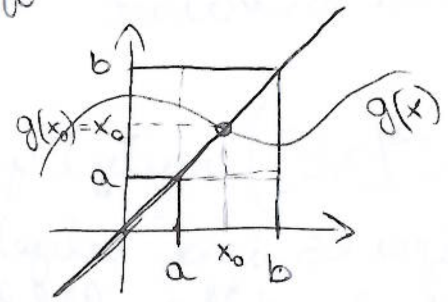
Az alg.-t akkor állítjuk le, mikor a köz. hibája kisebb egy $\varepsilon$ hibakorlátnál

Tétel: Ha $f \in C[a,b]$ és $f(a)f(b) < 0$, akkor az int. felező elj. során kapott $(x^{(k)})$ számsorozat konvergál az $f$ fv. valamely $[a,b]$-beli gyökéhez és érvényes a köv. hibafelt.:

$$|x^* - x^{(k)}| \leq \frac{a_k - b_k}{2} \leq \frac{b-a}{2^k} \quad (k=1,2,\dots)$$

2 Fixpontiterációs módszer (fokozatos közelítések módszere)

fp. it. módszer alkalmazásához átalakítjuk az $f(x)=0$ nemlin. egy.-et az $x=g(x)$ iteratív alakká, ahol $f \in C[a,b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$




$x_0 = g(x_0)$ fixpont

Def: Azt mondjuk, h. $x_0$ fixpontja a $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ fv.-nek, ha $x_0 = g(x_0)$.

Tétel: Adott $g \in C[a,b]$, melyre $g([a,b]) = \{g(x) \mid x \in [a,b]\} \subseteq [a,b]$ akkor $g(x)$-nek létezik fixpontja.

Def. A $g \in C[a,b]$-t kontrakciónak nev. az $[a,b]$-n, ha van olyan $q \in [0,1]$, hogy $|g(x)-g(y)| < q \cdot |x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]$.

Pl.: $g: [0,\frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x)=x^2$ kontrakció, mert vegyük $x,y \in [0,\frac{1}{4}]$

$$|g(x)-g(y)| = |x^2-y^2| = |(x-y)| \cdot |(x+y)| = |x-y| \cdot \underbrace{|x+y|}_{<0,5} < |x-y| \cdot 0{,}5$$

Tétel: Tfh. $g \in C^1[a,b]$ (folyt, diff, deriv. folyt). Ha $q := \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)| < 1$, akkor $g(x)$ egy kontrakció $[a,b]$-n.

Tétel: ! $g \in C^1[a,b]$ és tfh. $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ és $q = \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)| < 1$, akkor $\forall x^{(0)} \in (a,b)$ kezdő köz.-ből kiindulva $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ $k=0$

kapott másorozat (fixpontos iteráció) lineáris sebességgel konvergál az $x^*$ fixponthoz.

Hibabecslés: $|x^* - x^{(k)}| \leq q^k |x^* - x^{(0)}|$ $k = 0, 1, \dots$

Fixpont it. alg.-a $\varepsilon \in (0,1)$ hibakorlát, $x^{(0)}$ egy kezdőközelítés.
Tfh. $x^{(k)}$ $k$-adik közelítést már kiszámítottuk.

$\boxed{k = k+1}$ : $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$

$$h_{k+1} = \frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \to \text{STOP}. \quad \left(q = \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)|\right)$$

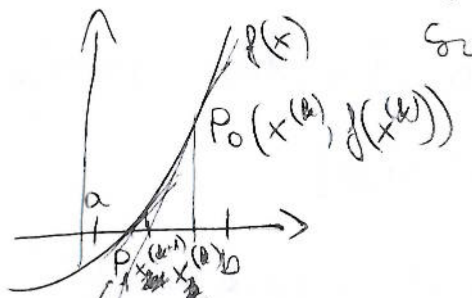
Megj.: $f(x) = 0 \to x = g(x)$ it. nemlin. egy.

$$f(x) = x - g(x) \quad ; \quad x = \frac{f(x)}{c(x)}$$

$g([a,b]) \notin [a,b]$ és $\max\limits_{a \leq x \leq b} g'(x) \leqslant 1$ esetén működhet !!!

3 Newton-módszer

Bevezetés: Az $f(x) = 0$ nemlin. egy. (ahol $f \in C^2[a,b]$) amely $z$ gyökét úgy közelítjük, hogy az $f(x)$ fv. görbéjét újra és újra helyettesítjük az érintőjével. Pontosabban $x^{(0)}$ alk. kezdőköz.-ből kiindulva ha $x^{(k)}$ előáll, $x^{(k+1)}$-et úgy kapjuk meg $x^{(k)}$-ból, h az $f(x^{(k)})$ fv. görbéjéhez húzunk érintőegyenest és ahol az metszi az $x$-tengelyt, az lesz a $k+1$-edik közelítés




Számítsuk ki:

$$m = \frac{0 - f(x^{(k)})}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}$$

$$f'(x^{(k)}) \simeq m = \frac{-f(x^{(k)})}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}, \text{ mert } f \text{ diffható}$$

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} \approx \frac{-f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$\boxed{x^{(k+1)} \approx x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

$$m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Tétel: Az $f(x) = 0$ nemlin. egy. esetén $f \in C^2[a,b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, akkor $f' \cdot f'' < 0$ esetén $x^{(0)} = a$-ból, $f' \cdot f'' > 0$: $x^{(0)} = b$-ből indulva a Newton-m. konv. $z$ valódi gyökhöz a köv. hiba mellett:

$$|z - x^{(k+1)}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|^2$$